

# 温度制御の原理と実際

朴 炳 植\*

## 1. はじめに

温度制御系の解析と設計法に関する基礎的な理論について解説する。温度制御理論といっても一般のプロセス制御理論と内容的に変ることではなく、ここで述べる理論はそのまま他のプロセス制御理論として適用できる。ここでは紙面の都合により、現在もっともよく利用されているPID調節器による制御の原理についての解説に議論を限定する。近年発展がめざましいコンピュータを利用したDDC (Direct Digital Control) についての理論に関しては他の成書を参考にされたい。

## 2. システムの特性表示

制御対象(以下では一般にシステムという)は線形で安定であるとする。図1に示すように、システムに単位インパルス入力 $\delta(t)$ を加えたと仮定する。その時のシステムの出力をインパルス応答といい、これを $g(t)$ とすると、 $g(t)$ のラプラス変換

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (1)$$

をシステムの伝達関数という。ここで、 $\mathcal{L}$ はラプラス演算を表す。いま、システムにある時間関数 $u(t)$ が加わったときの出力を $y(t)$ とすると、 $y(t)$ を求めてみよう。図2に示すように、 $u(t)$ の(0, t)間を $N$ 等分すると、 $n$ 番目の $u(n\Delta t)\Delta t$ の大きさのパルスに対する応答は、単位インパルスが加わったときは $g(t-n\Delta t)$ (ここで、 $\Delta t = t/N$ )であるので、 $u(n\Delta t)\Delta t \cdot g(t-n\Delta t)$ となる。したがって、 $y(t)$ は $n=0$ から $n=N-1$ までの出力を重ね合せたものとして

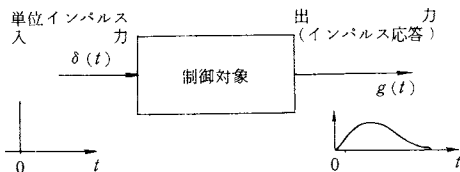


図1 システムのインパルス応答

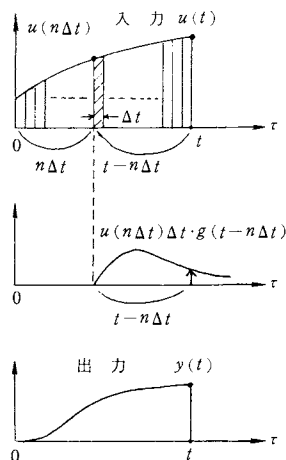


図2 システムの応答

$$y(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} u(n\Delta t) g(t-n\Delta t) \Delta t$$

$$= \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (2)_1$$

$$= \int_0^t g(\mu) u(t-\mu) d\mu \quad (2)_2$$

と求められる。(2)式はたたみ込み積分(convolution)といわれ、よく知られた convolution のラプラス変換より

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3)$$

となる。ここで、 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ 、 $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ である。(2)、(3)式より、任意の入力 $u(t)$ に対する応答 $y(t)$ は $g(t)$ あるいは $G(s)$ より求めることができ、インパルス応答あるいは伝達関数がシステムの特性を表わすことがよく分る。

インパルス応答は理論的なものであり、実験的には単位ステップ入力に対する応答、すなわちステップ応答 $w(t)$ がよく用いられている。(2)<sub>1</sub>式より

$$w(t) = \int_0^t 1 \cdot g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\mu) d\mu \quad (4)$$

である。すなわち、ステップ応答はインパルス応答を積分したものであり、システム特性の表現法の一つである。

現実のシステムは多くの構成要素からなっている。各構成要素の特性をそれぞれ伝達関数で表わし、その結合

\* 大阪大学工学部：吹田市山田上  
Pyong Sik Pak: Faculty of Engineering, Osaka University

表2 各種伝達関数のステラップ応答・ボード線図

名称	伝達関数	ステラップ応答	ボード線図
ゲイン	$K_P$		
積分	$1/s$		
微分	$s$		
1次遅れ	$\frac{K}{sT+1}$		
2次遅れ	$\frac{K}{(sT_1+1)(sT_2+1)}$ $T_1 > T_2$		
むだ時間	$e^{-Ts}$		
PID	$K_P(1+1/sT_1+sT_D)$		

表1 ブロック線図の等価変換

ブロック演算	変換前	変換後
1 直列結合		$A \rightarrow G_1 \times G_2 \rightarrow C$
2 加え合せ点の交換		$A \rightarrow \text{summing junction} \rightarrow G \rightarrow C$
3 並列結合		$A \rightarrow G_1 \pm G_2 \rightarrow C$
4 引出し点の移動 (ブロックの前へ)		$A \rightarrow G \rightarrow \text{summing junction} \rightarrow C$
5 引出し点の移動 (ブロックの後へ)		$A \rightarrow \text{summing junction} \rightarrow G \rightarrow C$
6 加え合せ点の移動 (ブロックの前へ)		$A \rightarrow \text{summing junction} \rightarrow G \rightarrow C$
7 加え合せ点の移動 (ブロックの後へ)		$A \rightarrow G \rightarrow \text{summing junction} \rightarrow C$
8 フィードバック結合		$A \rightarrow \frac{G_1}{1+G_1 G_2} \rightarrow C$

関係を矢印で示したものを**ブロック線図**という。ブロック線図では表1に示すような等価変換が成立し、ブロック線図の簡単化が実行できる。

システムの中には、ステップ入力のような急峻な入力を加えることが好ましくないものがある。また、ステップ応答がノイズや外乱のために求めにくいシステムもある。**周波数応答法**は、このような場合にシステムの特性を実験的に知るための一つの方法である。角周波数 $\omega$ 〔rad/s〕の正弦波 $\sin\omega t$ をシステムに加えたときの応答 $y(t)$ は、(2)<sub>2</sub>式より

$$y(t) = \int_0^t g(\mu) \sin\omega(t-\mu) d\mu$$

$$= \sin\omega t \int_0^t g(\mu) \cos\omega\mu d\mu - \cos\omega t \int_0^t g(\mu) \sin\omega\mu d\mu \quad (5)$$

である。(1)式より

$$G(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega\mu} g(\mu) d\mu$$

$$= \int_0^\infty \cos\omega\mu g(\mu) d\mu - j \int_0^\infty \sin\omega\mu g(\mu) d\mu \quad (6)$$

であるから、 $g(t)=0$ となるような十分大きい時間 $T_s$ を考えると $t > T_s$ では

$$y(t) = \text{Re}\{G(j\omega)\} \sin\omega t + \text{Im}\{G(j\omega)\} \cos\omega t$$

$$= |G(j\omega)| \sin\{\omega t + \angle G(j\omega)\} \quad (7)$$

となる。したがって、角周波数 $\omega$ の正弦波入力を加えて十分時間が経過した後のシステムのゲインを $K$ 、位相の遅れを $\theta$ 〔rad/s〕とすると

$$K = |G(j\omega)|, \quad \theta = \angle G(j\omega) \quad (8)$$

の関係が成立する。ゲイン $=20 \log_{10} K$ 〔db〕と位相 $=180\theta/\pi$ 〔deg〕を $\omega$ を横軸にとって片対数紙にプロットした図を**ボード線図**といい、システムの特性を**周波数領域**で示すものである。代表的なシステムの伝達関数とステップ応答とボード線図を表2に示す。

### 3. フィードバック制御系と安定判別

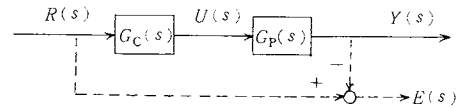
図3に基本的なオープン・ループ制御系およびフィードバック制御系の構成をブロック線図で示す。図3において、 $G_p(s)$ は制御対象、 $G_c(s)$ は調節器(補償要素)の伝達関数である。出力 $Y(s)$ 、入力 $U(s)$ はそれぞれ**制御量**、**操作量**ともいう。 $R(s)$ は制御量 $Y(s)$ の**目標入力**であり、 $E(s)$ は**誤差**である。図3(b)において、

$$Y(s) = G_p(s)U(s) \quad (9)$$

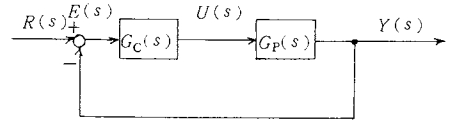
$$U(s) = G_c(s)E(s) \quad (10)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (11)$$

である。(9)~(11)式より、 $U(s)$ 、 $E(s)$ を消去する



(a) オープンループ制御系



(b) フィードバック制御系

図3 制御系の構成

と

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}R(s) \quad (12)_1$$

$$\equiv W_c(s)R(s) \quad (12)_2$$

となる。ここで、 $W_c(s)$ は

$$W_c(s) = G_c(s)G_p(s) / \{1 + G_c(s)G_p(s)\} \quad (13)_1$$

$$\equiv Q(s) / \{1 + Q(s)\} \quad (13)_2$$

$$Q(s) \equiv G_c(s)G_p(s) \quad (14)$$

である。 $Q(s)$ は**開ループ伝達関数**といわれ、 $W_c(s)$ は**閉ループ伝達関数**といわれる。

(12)<sub>1</sub>式より、

$$Y(s) = \frac{1}{1+1/Q(s)}R(s) \quad (15)$$

であるから、 $|Q(s)|$ が十分大である、すなわち開ループ伝達関数のゲインが十分大きいと、制御量 $Y(s)$ は目標入力 $R(s)$ にほぼ等しくなる。

とくに、調節器に積分器を用いると、 $s \rightarrow 0$ で $Q(s) \rightarrow \infty$ となるため、ステップ入力 $A/s$ に対する制御量の定常値はラプラス変換の最終値の定理より

$$y(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+1/Q(s)} \cdot \frac{A}{s} = A \quad (16)$$

となる。したがって、定常状態では制御量は目標入力に等しくなり、誤差がなくなる。

このようにフィードバック制御系では定常誤差を小さくしたり、あるいは常にしたりすることができる。

制御対象の特性は一般に一定でなく、種々の原因で変動するのが普通である。フィードバック制御を行なうとこの変動の影響を小さくすることができる。閉ループ伝達関数のパーセント変動率 $dW_c/W_c$ は(13)<sub>1</sub>式より

$$\frac{dW_c}{W_c} = \frac{1}{W_c} \cdot \frac{G_c dG_p(1+G_cG_p) - G_cG_pG_c dG_p}{(1+G_cG_p)^2}$$

$$= \frac{1}{1+G_cG_p} \cdot \frac{dG_p}{G_p} \quad (17)$$

となり、制御対象のパーセント変動率  $dG_p/G_p$  に比べ  $|1+G_C G_p|$  分の1に減少する。制御系では低周波域において、 $|1+G_C(j\omega)G_p(j\omega)|$  は1より十分大とするので  $G_p(s)$  の特性の変化に対して insensitive となる。

フィードバック制御を行なうと外乱の影響も小さくすることができる。制御系に加わる外乱は、図4に示すように等価的に制御対象の出力側に加わると仮定しても一般性を失なわない。この場合の出力  $Y(s)$  は

$$Y = \frac{G_C G_p}{1+G_C G_p} R + \frac{1}{1+G_C G_p} D \quad (18)$$

となり外乱  $D(s)$  の影響は  $|1+G_C G_p|$  分の1だけ小さくなる。

上で述べたようにフィードバック制御系では開ループ伝達関数  $Q(s) = G_C(s)G_p(s)$  のゲインが十分大であることが望ましい。しかし、これをあまり大きくすると制御系は不安定になる。図5は図3(b)におけるフィードバック制御系において、 $G_p(s) = 1/(s+1)^2$ 、 $G_C(s) = K_p$  とし、 $K_p = 0.5, 2.0, 5.0$  としたときのステップ応答を求めたものである。図から、 $K_p = 5.0$  の場合、制御系の出力は発散していることが分る。

フィードバック制御系が安定かどうかの判別は制御系を設計する上で極めて重要な問題であり、これまで種々の安定判別法が提案されている。その中で非常に実用的なのは ナイキストの安定判別法 である。これをボード線

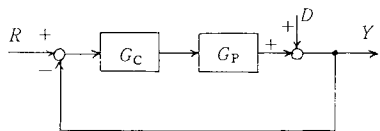


図4 制御系に加わる外乱

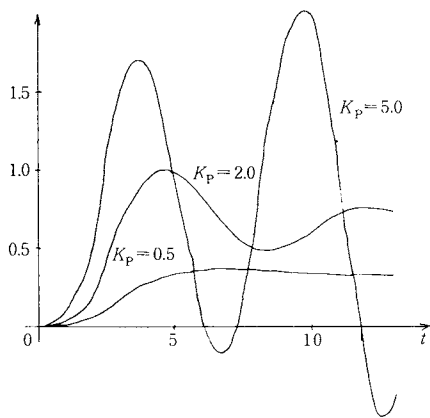


図5 フィードバック系のステップ応答

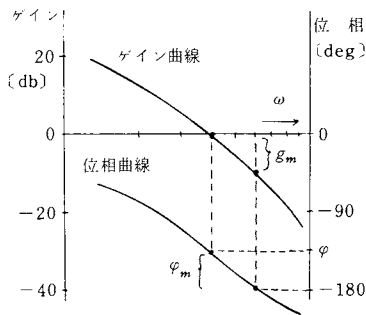


図6 ボード線図上での  $Q(j\omega)$  による安定判別

図上で説明すると次のようになる。図6に示すように、 $Q(j\omega)$  のゲイン曲線が  $0\text{[db]}$  を切るときの位相を  $\varphi$  とし、位相曲線が  $-180^\circ$  を切るときのゲインを  $-g_m$  とすると、 $\varphi_m = \varphi + 180$  および  $g_m$  がともに正のときフィードバック制御系は安定である。 $\varphi_m$ 、 $g_m$  をそれぞれ 位相余裕、ゲイン余裕 という。

#### 4. 制御系の設計

制御系として望ましいのは、目標入力がかたとえばステップ状態変化した場合制御量ができるだけすみやかに追従し(この特性を制御系の 速応性 という)、定常状態に達したときの誤差(これを 定常偏差 という)がないことである。フィードバック制御系では速応性を増すと一般に系は振動的になる。目標入力に変化したときの応答のふらつきがどの程度すみやかにおさまるかを表わすのが 減衰特性 あるいは 安定度 である。減衰特性、安定特性および速応性は開ループ伝達関数  $Q(s)$  のボード線図より類推できる。

減衰特性は位相余裕  $\varphi_m$  とゲイン余裕  $g_m$  から知ることができ、適度な安定度を得るためには、これらは次のような範囲におさめるのが望ましいとされている。

外乱値変動に対する制御

$$\varphi_m = 16 \sim 85^\circ \quad g_m = 3 \sim 9 \text{ [db]}$$

目標値変動に対する制御

$$\varphi_m = 50 \sim 65^\circ \quad g_m = 4 \sim 9 \text{ [db]}$$

定常特性は主として  $Q(j\omega)$  の低周波特性より定まり、低周波ゲインが高いほど定常特性はよい。逆に、速応性は主として  $Q(j\omega)$  の高周波特性より定まり、高周波ゲインが高いほど速応性はよい。

$Q(j\omega)$  の周波数特性は  $G_p(j\omega)$  と  $G_C(j\omega)$  より容易に求められる。いま、 $G_p(j\omega) = A_p \exp(-j\varphi_p)$ 、 $G_C(j\omega) = A_C \exp(-j\varphi_C)$  と表わすと、 $Q(j\omega) = A_p A_C \exp\{-j(\varphi_p + \varphi_C)\}$  であるから、 $Q(j\omega)$  のゲインは  $20 \log |G_p(j\omega)| + 20 \log |G_C(j\omega)|$ 、位相は  $-(\varphi_p + \varphi_C)$  となる。すなわち、 $Q(j\omega)$  の周波数特性は  $G_p(s)$  および  $G_C(s)$

のボード線図を図上で加え合わせるにより簡単に求められる。

フィードバック制御系の設計とは  $Q(s) = G_c(s)G_p(s)$  の特性が望ましいものとなるように制御対象  $G_p(s)$  の特性に応じて、調節器  $G_c(s)$  の特性を定める問題であるといえる。調節器  $G_c(s)$  にはほとんどの場合PIDコントローラ  $G_c(s) = K_p(1 + 1/T_1 s + T_D s)$  が用いられる。制御対象の多くは  $\exp(-sT_L)/Ts$  あるいは  $K \exp(-sT_L)/(1 + Ts)$  で近似できる。このとき、PIDコントローラのパラメータ  $K_p$ 、 $T_1$  および  $T_D$  ( $T_1$  を積分時間またはリセット時間といい、 $T_D$  を微分時間またはレート時間という)の最適値を理論的に求めた結果を示すと表3のとおりとなる。

制御対象の特性を直接用いないでパラメータを実験的に決定する方法にジークラ・ニコルズの限界感度法がある。これは調節器をP動作だけとして、ゲインを高くしていき、持続振動が生じるとききのゲイン  $K_0$  とその周期  $T_0$  を求め、これから表4に従ってパラメータを定めるものである。これは経験上から得られた方法で、実用上有効であることが確かめられている。

$G_p(s) = e^{-1s}/(10s + 1)$  なる特性を持つ制御対象を例にとって、限界感度法によって定められたPID調節器

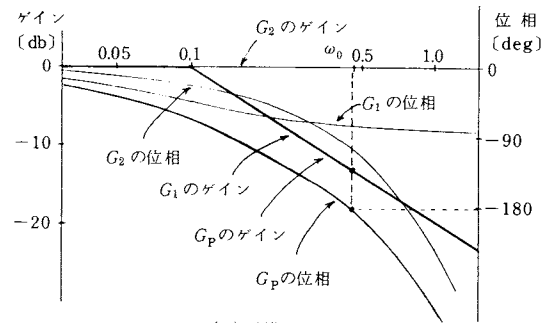
表3 調節計のパラメータ設定法

制御対象の近似式	着目する入力	評価基準	制御方式	設定値
$\frac{1}{sT} e^{-sT_L}$ <i>T</i> : 時定数 <i>T<sub>L</sub></i> : むだ時間	ステップ状外乱	制御面積最小	P	$K_p = 0.9 T/T_L$
			PI	$K_p = 0.9 T/T_L$ $T_1 = 3.3 T_L$
			PID	$K_p = 1.3 T/T_L$ $T_1 = 2.2 T_L$ $T_D = 0.45 T_L$
$\frac{K}{1+sT} e^{-sT_L}$ ( <i>K</i> : ゲイン <i>T</i> : 時定数 <i>T<sub>L</sub></i> : むだ時間)	ステップ状外乱	20%行きすぎ最短時間整定	P	$K_p = 0.7 T/KT_L$
			PI	$K_p = 0.7 T/KT_L$ $T_1 = 2.3 T_L$
			PID	$K_p = 1.2 T/KT_L$ $T_1 = 2 T_L$ $T_P = 0.42 T_L$
	ステップ状目標値変化	20%行きすぎ最短時間整定	P	$K_p = 0.7 T/KT_L$
			PI	$K_p = 0.6 T/KT_L$ $T_1 = T$
			PID	$K_p = 0.95 T/KT_L$ $T_1 = 1.35 T_L$ $T_D = 0.47 T_L$

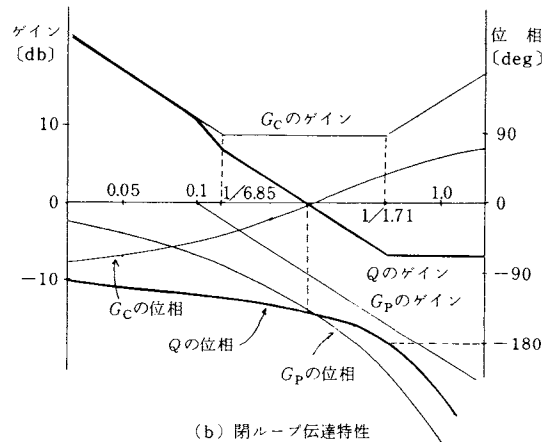
表4 限界感度法によるパラメータ最適調整値

	$K_p$	$T_1$	$T_D$
P	$0.5 K_0$		
PI	$0.45 K_0$	$0.83 T_0$	
PID	$0.6 K_0$	$0.5 T_0$	$0.125 T_0$

$G_c(s)$  により、 $Q(j\omega)$  の特性がどのように改善されるかをボード線図を用いて説明してみよう。この例題はこれまでに説明した制御理論がどのように適用されるかのよい練習問題となろう。 $G_p(s) = G_1(s)G_2(s)$ 、 $G_1(s) = 1/(10s + 1)$ 、 $G_2(s) = e^{-1s}$  とすると、 $G_p(s)$  のボード線図は  $G_1(s)$  と  $G_2(s)$  のボード線図を加えて図7(a)に示すようになる。図7(a)より、 $G_c(s) = 1$  としたとき(調節器を用いずにフィードバックをかけたとき)のゲイン余裕は、位相遅れが  $-180^\circ$  となる角周波数  $\omega_0 = 0.46$  [rad/s] のときのゲインより 13 [db] であることが分る。 $G_c(s) = K_p$  として  $K_p$  を大きくしていくと、 $Q(j\omega)$  の位相は変わらずゲインだけ大きくなり、 $K_p = 13$  [db] (すなわち、 $K_0 = 10^{13/20} = 4.47$ ) のときが安定限界となり持続振動が生じる。その周期  $T_0$  は  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 13.7$  [s] である。したがって、PIDコントローラのパラメータは表4より、 $K_p = 2.68$ 、 $T_1 = 6.85$ 、 $T_D = 1.71$  となる。これより、 $Q(j\omega)$  のボード線図は図7(b)に示すように求められる。図7(b)より、このときの制御系はゲイ



(a) 制御対象



(b) 閉ループ伝達特性

図7 限界感度法により計算された制御系の特性

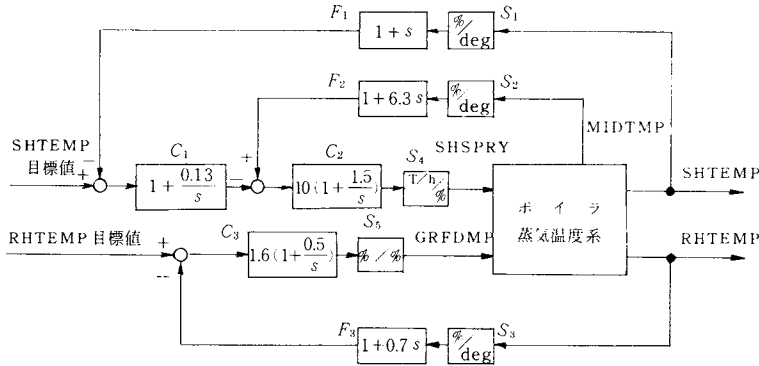


図8 ボイラ蒸気温度制御系

ン余裕 6.6 [db]、位相余裕 40° となり、適度の安定度を持つことが分る。また、低周波域および高周波域でゲインが著しく増加しており、定常特性、速応性が改善されていることが分る。

5. 温度制御の例

本節では、火力発電所における蒸気温度制御の一例をあげ、制御系構成における実際的な問題点について述べる。

火力発電用ボイラ蒸気温度系の制御量は過熱器出口蒸気温度（以下では SHTEMP と略する）と再熱器出口蒸気温度（RHTEMP と略す）である。操作量は過熱器スプレー流量（SHSPRY）と燃焼ガスを再循環するファンのダンパー開度（GRFDMP）である。図8にボイラ蒸気温度制御系の構成を示す<sup>1)</sup>。図における MIDTMP はスプレー水が注入されたすぐ後の過熱器温度、すなわち過熱器の中間温度であり、これは SHTEMP の予測に役立つ。図8において、 $S_1 \sim S_5$  は検出温度（単位は deg）を電子式のコントローラへの電気信号（単位は基準値に対するパーセント）に変える変換器である。 $S_4, S_5$  はそれぞれ電気信号の大きさに応じたスプレー流量 [ton/hour] およびダンパー開度 [%] を与える操作器である。制御系を設計する場合、変換器や操作器の伝達特性を無視できない場合があるから注意を要する。

図8の構成では、フィードバック・ループに  $F_1, F_2, F_3$  のフィードバック要素が加えられている。ここでは、 $F_1 \sim F_3$  に PD 調節器が用いられている。これは、微分先行型制御といわれ、制御量の変化の影響を拡大して検出する働きをする。ボイラ蒸気温度系では SHSPRY の影響が SHTEMP に表われるのに大きなむだ時間がある。このため、図8ではスプレー注水直後の MIDTMP を用いてマイナー・フィードバックがかけられている。MIDTMP の変動は小さいので  $F_3$  のレート時間は 6.3

min. と大きくしてある。SHSPRY から MIDTMP へのむだ時間は小さいので、マイナー・ループのオープン・ループゲインを高くとることができ、PI コントローラ  $C_2$  の比例ゲインは大きくなっている。これは系の速応性を高める効果がある。 $C_1$  および  $C_3$  は PI コントローラであるので、SHTEMP および RHTEMP には定常偏差（オフセット）が生じない。

つぎに、制御系構成における問題点を述べると以下のようなになる。ボイラ蒸気温度系は入出力がそれぞれ複数個ある多変数システムである。これらの入出力間には相互干渉があるため、1で述べた調節器のパラメータ設定法はそのまま適用することができない。パラメータの設定は試行錯誤的に行なわれ、一般に最適調整値となっていないという問題がある。また、蒸気温度系の特性は負荷が変動すると変化する。このため、すぐれた制御成績を得るには特性変化に応じてパラメータの設定値を変える必要がある。しかし、図8の制御系は適応制御の動作がない、などの問題である。

6. おわりに

温度制御を行なうにあたって必要と思われるフィードバック理論について解説した。ここで述べたことがらは自動制御理論のもっとも基礎的な理論に限定した。さらに詳しい内容については参考文献を参照されたい<sup>2~4)</sup>。

文 献

1. 朴 炳植, 鈴木 胖, 岡本武昌, 内田義久, “火力発電用ボイラ蒸気温度系の同定と制御系設計” 計測自動制御学会第四回制御理論シンポジウム (1975)
2. 伊沢計介, “自動制御入門” オーム社 (1954)
3. 大島康次郎, 稲葉正太郎, “自動制御入門” 丸善 (1967)
4. 近藤文治, 藤井克彦, “大学課程制御工学” オーム社 (1972)